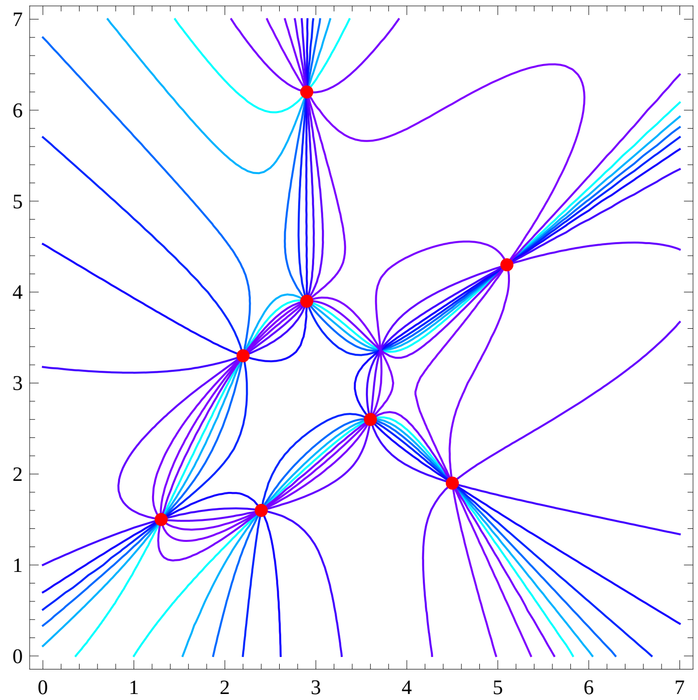
神戸大学理学部サイエンスセミナー２０１２

厳密解の種明かし



2012年7月21日

山田泰彦（神戸大学理学研究科数学専攻）

はじめに - 研究の動機 -

代数方程式，連立方程式，漸化式，微分方程式など，方程式にも様々な種類のものがあり，それぞれに簡単なものもあれば難しいものもあります．

実際問題に出て来る方程式は簡単には解けないことが多く，解はあきらめて，いろいろな近似法，数値計算，定性的な評価などを追求するのが普通です．しかし，

特別な場合でもいいので，解けるものなら「厳密」な解を知りたい

と思うのも自然でしょう．

今回は解ける非線形漸化式を題材として，解けることの裏に隠されたタネやシカケを探っていきます．前半では「保存系」を，後半では「非保存系」を扱います．

目的：解ける例をみつけて，そのカラクリを明らかにする

1．保存系の場合

例として，次の 2 つの方程式を考えます．

$$(A): \quad x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n x_{n-1} - 1}$$

$$(B): \quad x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n-1}^2 - 1}$$

どちらも，x_{n-1}, x_n の値から x_{n+1} が決まる漸化式です.(n は離散的な時間変数)

(A),(B) で，あまり違いがなさそうですが，$(x_0, x_1) = (2, 3)$ を初期値として計算してみる (計算機にさせてみる) と…

n	$x_n(A)$	桁数	$x_n(B)$	桁数
0	2	1	2	1
1	3	1	3	1
2	$\frac{8}{15}$	1	$\frac{2}{3}$	1
3	$\frac{85}{24}$	2	$\frac{13}{8}$	2
4	$\frac{957}{680}$	3	$-\frac{77}{65}$	2
5	$\frac{26072}{27115}$	5	$-\frac{271}{1155}$	3
6	$\frac{4024495}{1039621}$	7	$-\frac{823145}{461784}$	6
7	$\frac{482717818}{771519365}$	9	$-\frac{1680213530481}{1037643416680}$	13
8	$\frac{164893983723}{71646522034}$	12	$-\frac{123505709673935541577384}{780162170822213105415489}$	24

となって, 分子の桁数の増え方 (分母も同様) に違いがあるのがわかります.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(A)	1	1	1	2	3	5	7	9	12	15	18	22	26	31	36	41
(B)	1	1	1	2	2	3	6	13	24	49	96	193	384	768	1535	3069

何が起っているのかを探るために，初期値 x_0 を変数にして，$(x_0, x_1) = (t, 2)$ の場合に計算してみます．

(A) の場合

n	x_n	分子の次数
2	$\dfrac{2t+1}{2(2t-1)}$	1
3	$\dfrac{(2t-1)(2t+5)}{2(2t+1)}$	2
4	$\dfrac{2\left(12t^2+20t-9\right)}{(2t-1)(2t+1)(2t+5)}$	2
5	$\dfrac{(2t+1)\left(8t^4+44t^3+38t^2-39t+8\right)}{(2t-1)(2t+5)\left(12t^2+20t-9\right)}$	5
6	$\dfrac{(2t-1)(2t+5)\left(16t^5+112t^4+248t^3+80t^2-183t+41\right)}{\left(12t^2+20t-9\right)\left(8t^4+44t^3+38t^2-39t+8\right)}$	7

となって，奇麗に因数分解されています．　一方 (B) では，

(B) の場合

n	x_n	分子の次数
2	$\dfrac{t^2+1}{2(t-1)(t+1)}$	2
3	$\dfrac{7t^2-5}{3(t^2+1)}$	2
4	$\dfrac{-19t^6+55t^4-89t^2+29}{(t^2-3)(3t^2-1)(7t^2-5)}$	6
5	$\dfrac{-669t^{10}+5095t^8-10674t^6+9054t^4-2177t^2-21}{8(t^2-2)(5t^2-1)(19t^6-55t^4+89t^2-29)}$	10
6	$\dfrac{-355829t^{22}+6069785t^{20}+\cdots+3410969t^2-290549}{8(t^2+1)(t^4-16t^2+7)(10t^6-35t^4+40t^2-11)(669t^{10}+\cdots+21)}$	22

となって，手のつけようがありません．(あまりに長いので式の一部を省略しました)

さらに計算機に頑張ってもらって，分子の次数を見ていくと...

分子の次数の比較:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
(A)	1	2	2	5	7	9	13	16	21	26
(B)	2	2	6	10	22	42	86	170	342	682

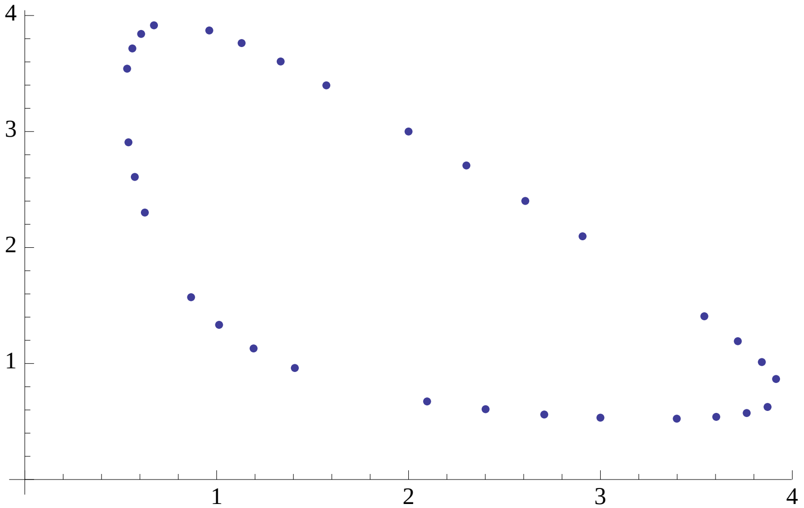
となり，次数の増え方は，$\begin{cases} (A): & n\text{の}2\text{次関数} \\ (B): & n\text{の指数関数} \end{cases}$ の程度と観察されます.

一般に非線形の漸化式では，次数が(B)のように指数的に増大するのが普通です.
例: $x_{n+1} = x_n^2 + 1$, $x_0 = a$ のとき,

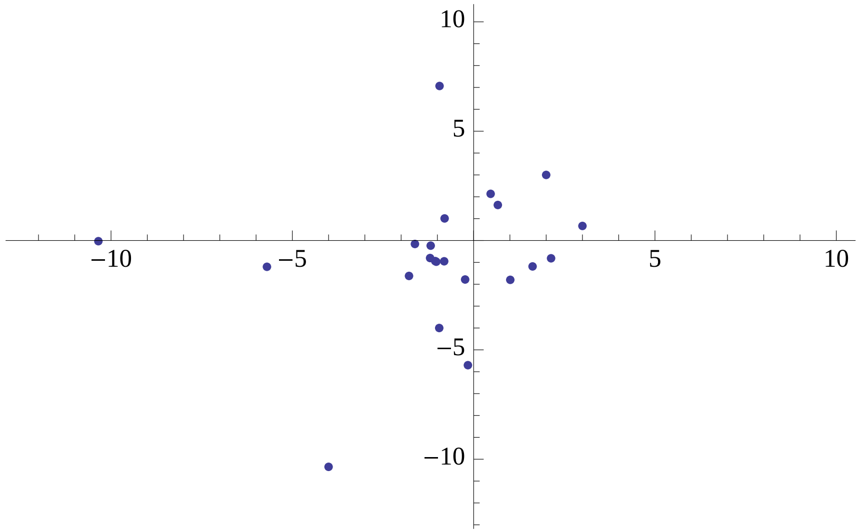
$$\begin{aligned} &x_0 = a \\ &x_1 = a^2 + 1 \\ &x_2 = (a^2+1)^2 + 1 = a^4 + 2a^2 + 2 \\ &x_3 = (a^4 + 2a^2 + 2)^2 + 1 = a^8 + 4a^6 + 8a^4 + 8a^2 + 5 \end{aligned}$$

つまり，(A)では通常期待できないような因数分解と約分が次々と起っているのです.
その裏には何か理由があると思われます.

$(x_0, x_1) = (2, 3)$ の場合に，(x_n, x_{n+1}) を座標とする点を xy 平面上に描いてみると，(A) は規則的に (B) は無秩序に分布します．



(A)



(B)

実は (A) の場合，

$$H_n = x_n + x_{n+1} + \frac{1}{x_n x_{n+1} - 1},$$

とおくと，H_n が n によらず一定値となることがわかります．このような H_n を保存量といい，これを用いて (ここではしませんが) 厳密解が構成できます．つまり (A) は「解ける方程式」であり，その秘密は保存量だったわけです．

保存量をタネにして解ける同様の例としてQRT系があり，次のようにして得られます(ただし，Quispel-Roberts-Thompson(1988)の元々の作り方ではありません).

(1) xについてもyについても高々2次であるような2つの多項式$F(x,y)$，$G(x,y)$を用意し$H(x,y)=\dfrac{F(x,y)}{G(x,y)}$とおきます.

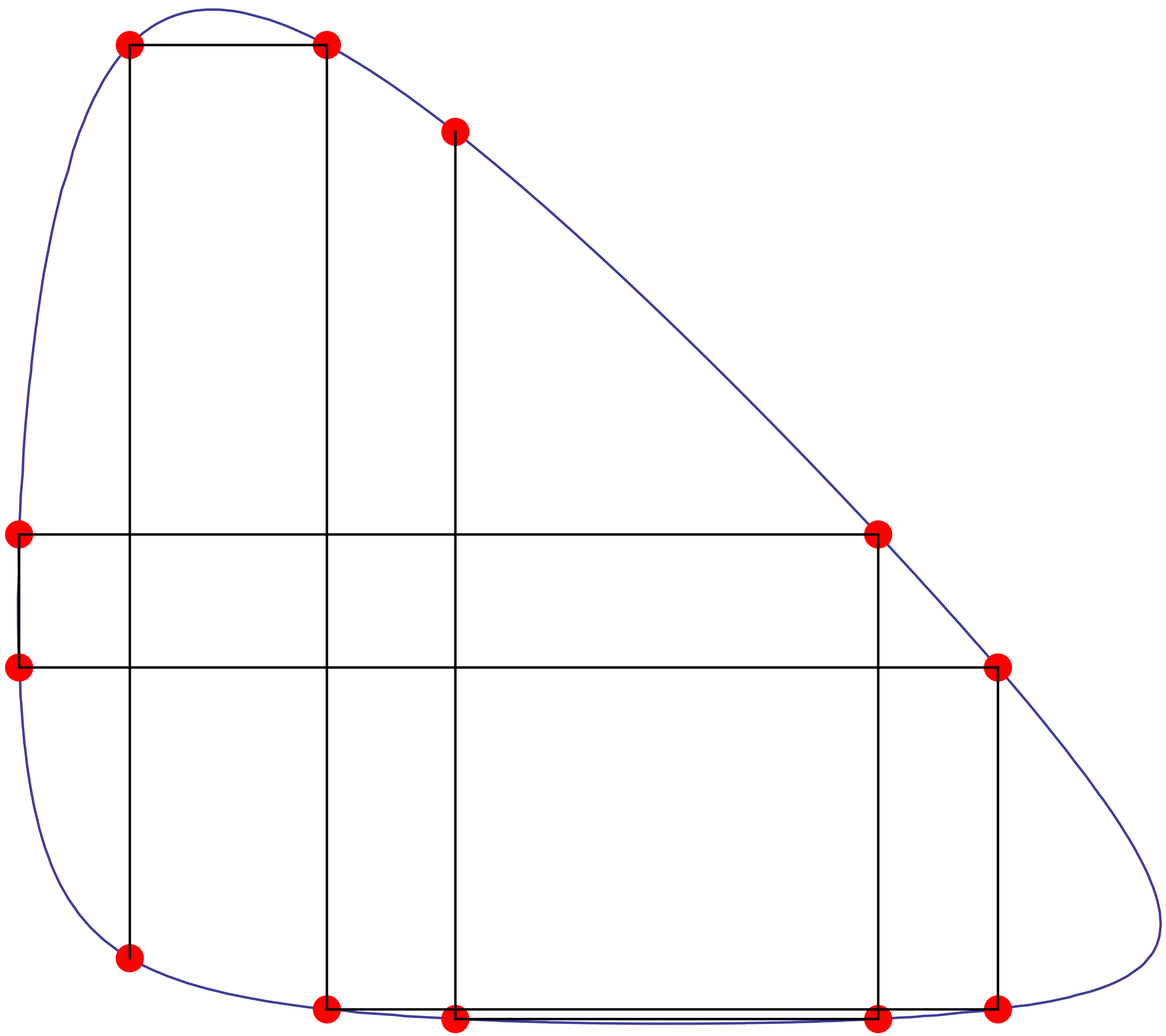
(2) $H(x',y)=H(x,y)$となるx'を求めます．これはx'に対する2次方程式ですが，自明な解$x'=x$があるので，もう1つのx'も根号なしで解けます.

(3) 同様に$H(x,y')=H(x,y)$となる$y'(\neq y)$を求めます.

(4) 変換 $x\to x'$と$y\to y'$ の繰り返しを離散的な時間発展とします.

作り方からHが保存量になります.

QRT系：



例：$H(x,y)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{a}+\dfrac{1}{xy}+y$ の場合.

$H(x',y)=H(x,y)$, $H(x,y')=H(x,y)$ の非自明な解 x',y' は,

$$x'=a\frac{1+y}{xy},\qquad y'=\frac{1}{xy},$$

で与えられます．これより，変換 $y\to y'$ と $x\to x'$ の合成

$$\begin{array}{ccc} (x_n,y_n) & & \\ \downarrow & & \\ (x_n,y_{n+1}) & \longrightarrow & (x_{n+1},y_{n+1}), \end{array}$$

を作ると,

$$y_{n+1}=\frac{1}{x_ny_n},\qquad x_{n+1}=a\frac{1+y_{n+1}}{x_ny_{n+1}}=a\left(\frac{1}{x_n}+y_n\right),$$

となります．これは連立型の漸化式ですが，y_n を消去すれば,

$$\frac{x_{n+2}}{a}=\frac{1}{x_{n+1}}+y_{n+1}=\frac{1}{x_{n+1}}+\frac{a}{x_nx_{n+1}-a},$$

となって，$a=1$ とおけば今まで扱ってきた例の (A) になります.

ここまでの話をまとめておきましょう.

- 漸化式

$$y_{n+1} = \frac{1}{x_n y_n}, \quad x_{n+1} = a(\frac{1}{x_n} + y_n),$$

は特別な方程式で，幸運な約分が次々に起ります．

- その背景として，この漸化式は保存量

$$H(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{x}{a} + \frac{1}{xy} + y,$$

をもちます．つまり $H(x_n, y_n) = H(x_{n+1}, y_{n+1})$.

- 類似の例はQRT系として知られ，保存量 H をタネにして構成できます．

「解ける漸化式」のタネ明かし（その１）＝「保存量」

2．非保存系の場合

前節の最後の漸化式に少しイタズラをして，

$$x_{n+1} = a_n(\frac{1}{x_n} + y_n), \quad y_{n+1} = \frac{1}{x_n y_n},$$

を考えます．a_n が定数でないと，$H = \frac{1}{x_n} + \frac{x_n}{a_n} + \frac{1}{x_n y_n} + y_n$ は保存量になりません．
それでも解の振る舞いが良い場合があります．

それを調べるために，$x_n = \frac{F_{n-2}F_{n+1}}{F_{n-1}F_n}$，$y_n = \frac{F_{n-1}^2}{F_{n-2}F_n}$ とおいてみます．このとき，(2) 式は自動的に満たされ，(1) 式は次のようになります．

$$F_{n-2}F_{n+2} = a_n(F_n^2 + F_{n-1}F_{n+1}).$$

これから F_{n+2} を求めるには，右辺を F_{n-2} で割らないといけませんが，数列 a_n をうまく選ぶと，これが毎度割り切れるようにできるのです．

割り切れるための$\{a_n\}$の条件を求めてみましょう.

漸化式をn番目の前後で書いてみると

$$\begin{array}{llcllclll}
 & & \vdots & & & & & & \\
F_{n-4} & F_n & = & a_{n-2} & F_{n-2}^2 & + & a_{n-2} & F_{n-3} & F_{n-1} \\
F_{n-3} & F_{n+1} & = & a_{n-1} & F_{n-1}^2 & + & a_{n-1} & F_{n-2} & F_n \\
F_{n-2} & F_{n+2} & = & a_n & {F_n}^2 & + & a_n & F_{n-1} & F_{n+1} \\
F_{n-1} & F_{n+3} & = & a_{n+1} & F_{n+1}^2 & + & a_{n+1} & F_n & F_{n+2} \\
F_n & F_{n+4} & = & a_{n+2} & F_{n+2}^2 & + & a_{n+2} & F_{n+1} & F_{n+3} \\
 & & \vdots & & & & & &
\end{array}$$

そこで，初期値を調節してF_nが0 (他は0でない有限値)となったとします.

$$
\begin{array}{rrcccccc}
 & 0 & = & a_{n-2} & F_{n-2}^2 & + & a_{n-2} & F_{n-3} & F_{n-1} \\
F_{n-3} & F_{n+1} & = & a_{n-1} & F_{n-1}^2 & & & & \\
F_{n-2} & F_{n+2} & = & & & & a_n & F_{n-1} & F_{n+1} \\
F_{n-1} & F_{n+3} & = & a_{n+1} & F_{n+1}^2 & & & & \\
 & 0 & = & a_{n+2} & F_{n+2}^2 & + & a_{n+2} & F_{n+1} & F_{n+3}
\end{array}
$$

となるので

$$
a_{n-1} = \frac{F_{n-3}F_{n+1}}{F_{n-1}^2} = -\frac{F_{n-2}^2 F_{n+1}}{F_{n-1}^3}, \qquad a_{n+1} = \frac{F_{n+3}F_{n-1}}{F_{n+1}^2} = -\frac{F_{n+2}^2 F_{n-1}}{F_{n+1}^3},
$$

$$
a_{n-1}a_{n+1} = \left(\frac{F_{n-2}F_{n+2}}{F_{n-1}F_{n+1}}\right)^2 = a_n^2,
$$

つまり $\{a_n\}$ は等比数列にとるべきことがわかります.

1990年頃から，こうした「割り切れる条件」などを手がかりに，面白そうな漸化式がいくつも構成されました．これらの方程式は，非線形・非保存系でありながら振る舞いが良いので離散パンルヴェ方程式と呼ばれます．

パンルヴェ方程式は，100年以上前にフランスの数学者P.パンルヴェとその弟子が大変な計算によって見つけた6個の微分方程式です．離散パンルヴェ方程式は，その差分版です．パンルヴェ方程式は，現代数学の抽象化・一般化の流れの中で一時ほとんど忘れられていましたが，現在は見事に復活し盛んに研究されています．

それでは，離散パンルヴェ方程式は解けるのでしょうか？

実は，微分の場合と同様に，離散パンルヴェ方程式は一般には解けないと思われています．しかし，方程式にパラメータが含まれる場合に，それが特殊な値のとき厳密解をもつことがあります．

例．保存量

$$H(x,y)=\frac{1}{y}+\frac{x}{y}+\frac{1}{kx}+\frac{y}{kx}+ax+\frac{by}{k},$$

に対するQRT系を変形して得られる次の漸化式を q-P_{III} 方程式といいます．

$$\frac{x_{n+1}x_n}{y_n}=\frac{1}{k}\cdot\frac{1+y_n}{1+aq^ny_n},\qquad \frac{y_{n+1}y_n}{x_{n+1}}=k\cdot\frac{1+x_{n+1}}{1+bq^nx_{n+1}}.$$

この方程式は，(i) $a=b$，かつ (ii) $y_n=-kx_n$ のとき，1つの簡単な方程式

$$x_{n+1}=-\frac{1-kx_n}{1-akq^nx_n},$$

に帰着し，次のような解を持っています．

$$x_n=\frac{(1-qk)}{kaq^n}\frac{F_n(k)}{F_n(kq)},$$

$$F_n(k)=1+\frac{aq^n}{(1-q)(1-kq)}+\frac{(aq^n)^2}{(1-q)(1-q^2)(1-kq)(1-kq^2)}+\cdots.$$

$F_n(k)$ は線形漸化式 $kF_{n+2}-(1+k)F_{n+1}+(1-aq^n)F_n=0$ の解です．

残った時間で，このような解が存在するタネ明かしをしましょう．

そのために，離散パンルヴェ方程式を幾何学的に調べます．
(理由：(1) 式ではあまりに複雑．(2) 解のシカケが見やすい)

以下では，３次曲線が重要です．３次曲線とは (x, y) の３次式によって，

$$C_1 + (C_2 x + C_3 y) + (C_4 x^2 + C_5 xy + C_6 y^2) + (C_7 x^3 + C_8 x^2 y + C_9 xy^2 + C_{10} y^3) = 0,$$

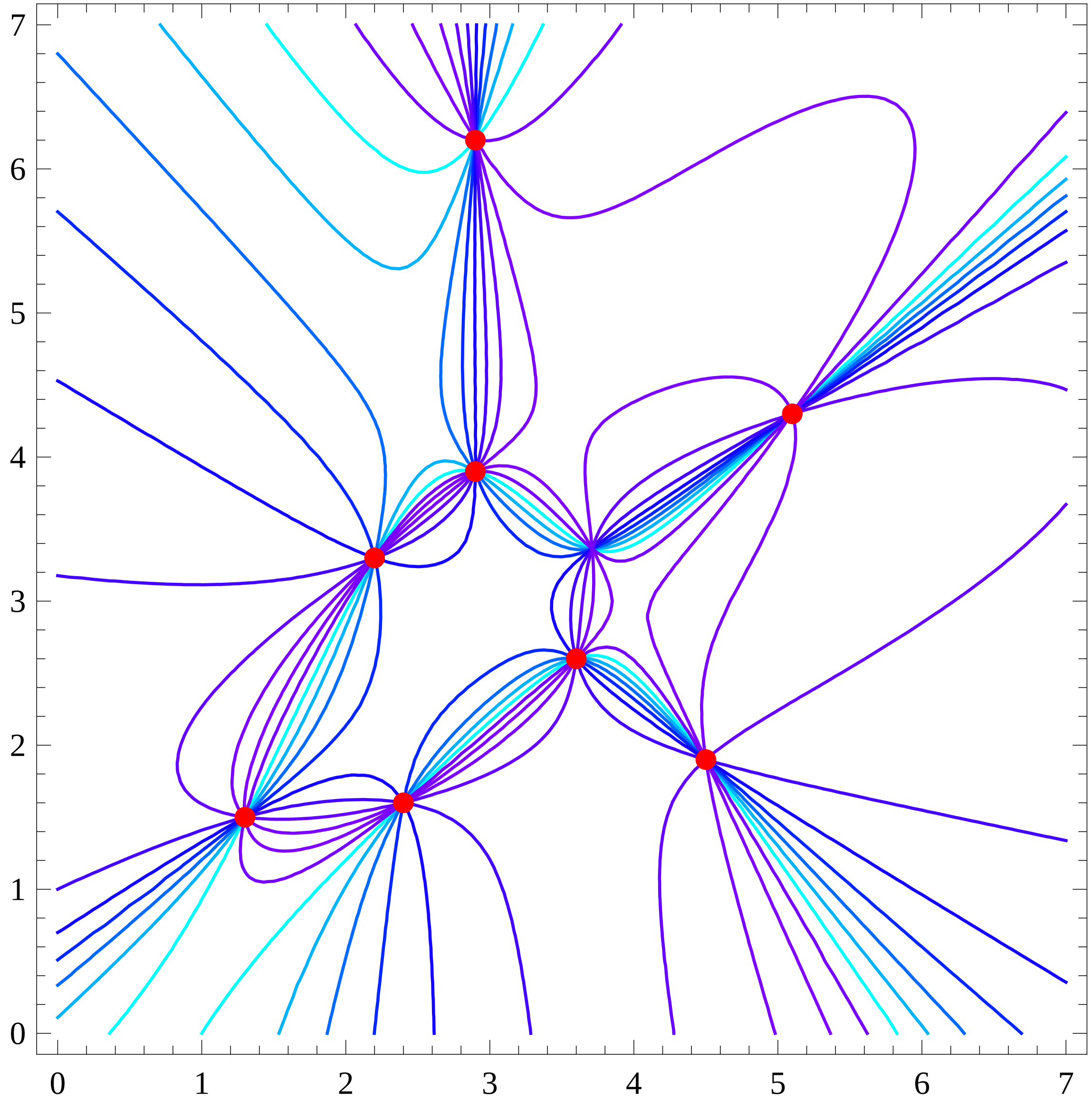
と表せる曲線です．係数は10個ですが，全体の定数倍は意味がないので，９点を与えると，それらを通る３次曲線が１つ決まります．

８点を与えたとき，それらを通る３次曲線は，２つの任意定数 A, B によって，

$$Af(x, y) + Bg(x, y) = 0$$

と書け，曲線としては１パラメータの族になります．２つの３次曲線 $f = 0$，$g = 0$ の交点は $3 \times 3 = 9$ 個あるので，指定した８点以外にもう１つの共通交点があります．これは３次曲線の基本的な性質です．

８点を共有する３次曲線は，ある９番目の点も共通に通る．



離散パンルヴェ方程式の幾何学的記述

平面上に 10 点 $P_1, \cdots, P_{10}$ をとります.

- $P_1, \cdots, P_9$ がパラメータ (1 部が独立変数)
- P_{10} が未知変数 (従属変数)

の役割を果たします.

方程式はこれらの点の運動規則です．パラメータのどれを独立変数として動かすかによって，いろいろな「方向」への運動を考えることができます.

どの方向も基本的に対等ですが，ここでは，$P_1, \cdots, P_7$ が固定されており，P_8，P_9 が変化する方向について，

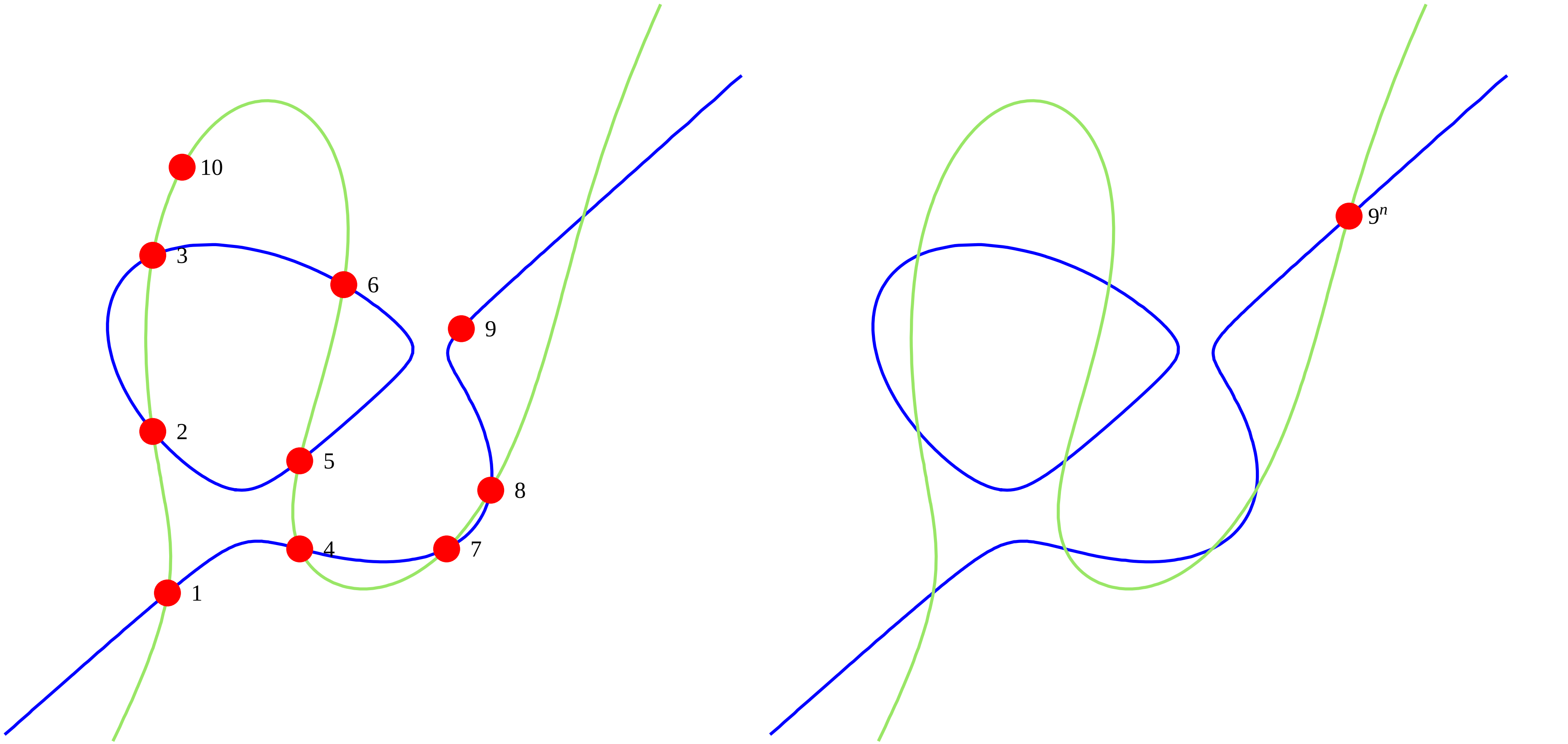
$$P_8 \to P_8^{\mathsf{n}},$$

$$P_9 \to P_9^{\mathsf{n}},$$

$$P_{10} \to P_{10}^{\mathsf{n}},$$

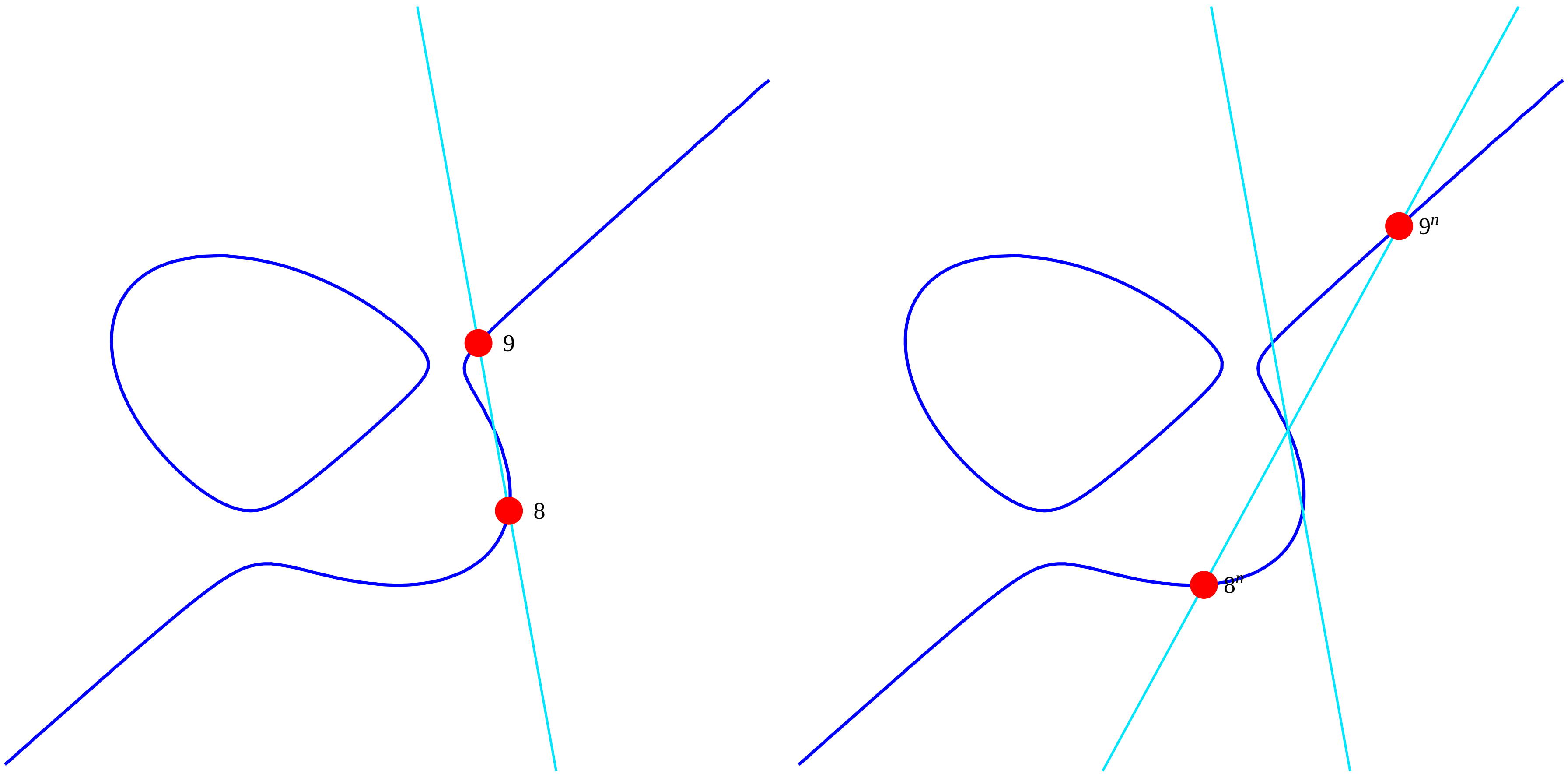
の規則を述べます.

P_9^{n}: 「P_{10}を除く９点を通る３次曲線」と「P_9を除く９点を通る３次曲線」の交点



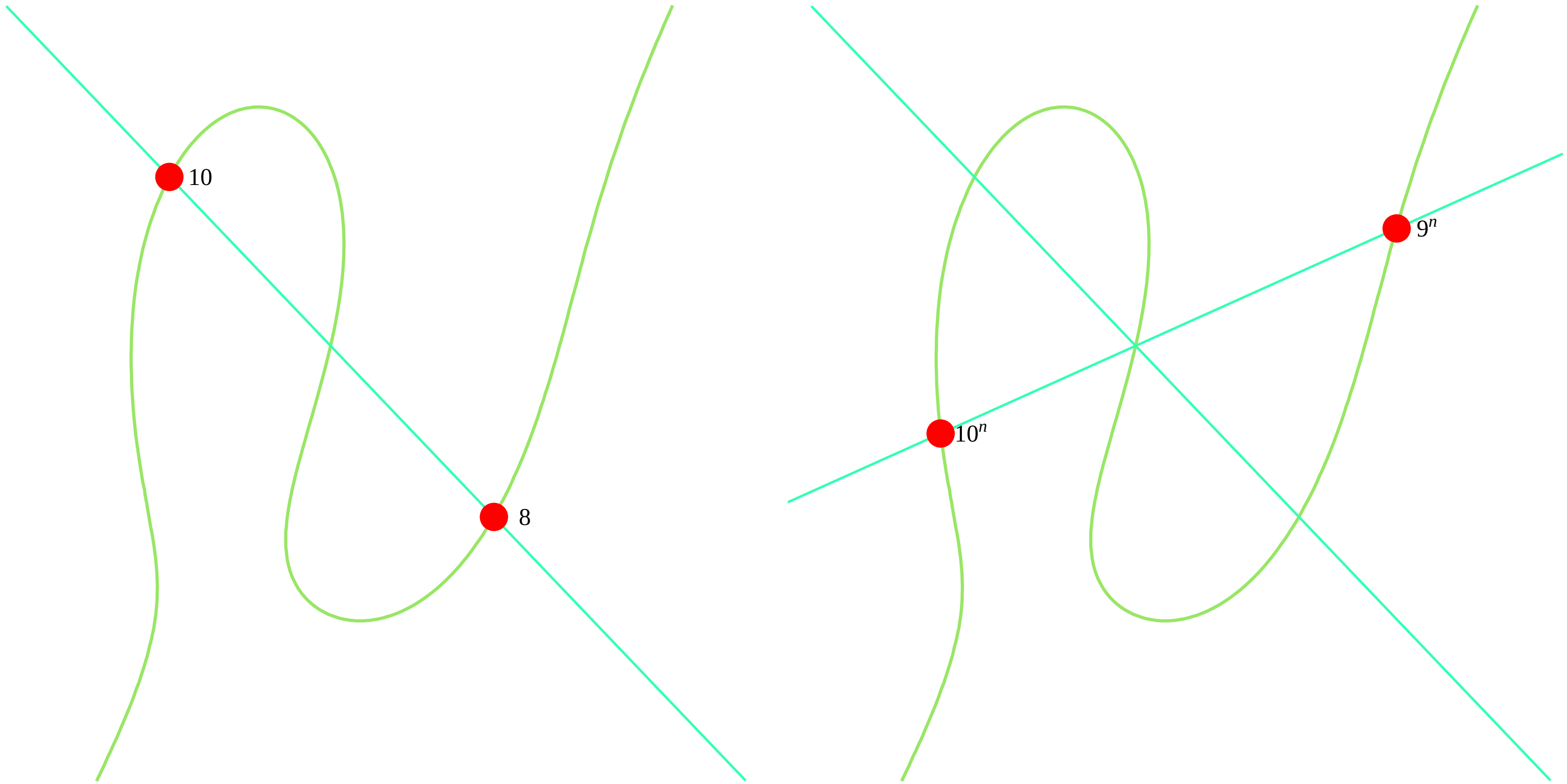
P_9^{n}は，８点$P_1,\cdots,P_8$を通る３次曲線たちの９番目の共通交点です．したがって，P_9^nは，P_9，P_{10}によらず$P_1,\cdots,P_8$のみから決まります．

P_8^n: 青曲線, 直線$\overline{P_8P_9}$, 直線$\overline{P_8^nP_9^n}$ が1点で交わるようなP_8^n



定義より青曲線は終始固定されており, P_8, P_9はその上をQRT的に運動します.

P^{n}_{10}:　緑曲線，直線 $\overline{P_8P_{10}}$，直線 $\overline{P^{\mathrm{n}}_9P^{\mathrm{n}}_{10}}$ が 1 点で交わるような P^{n}_{10}



P_{10} は緑曲線上を運動します．緑曲線自身が P_8, P_9 と共に変化するので，P_{10} の運動は保存系ではありません．(保存系にイタズラしたもの)

それでは，厳密解が得られる場合のタネ明かしをしましょう．

もっとも簡単な設定は，次のような場合です．

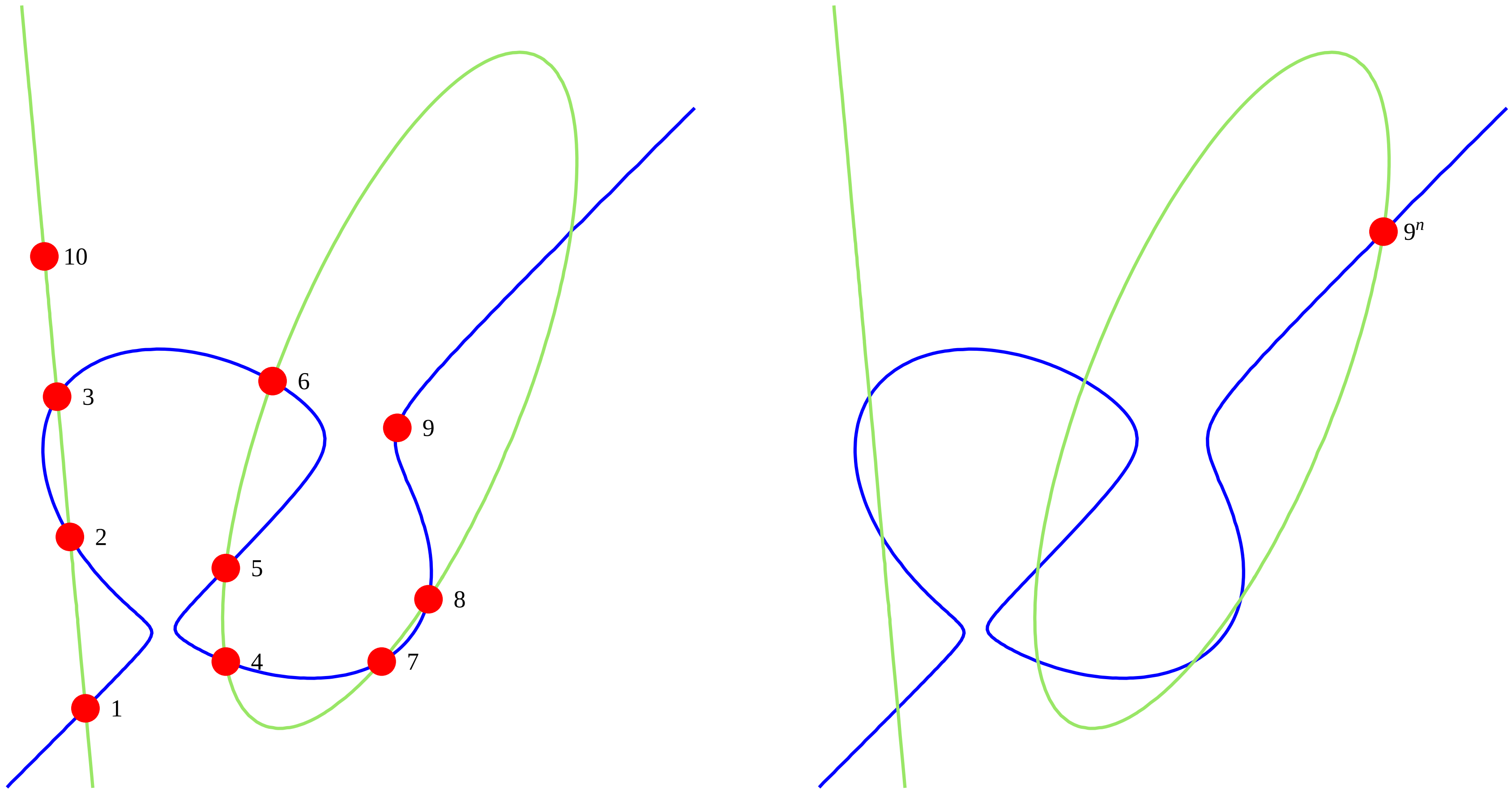
(i)　３点（例えば P_1, P_2, P_3）が，ある直線 L 上にあり，

(ii)　P_{10} もその直線 L 上にある．

これらは，q-P_{III} の例における２つの条件，(i) $a = b$，(ii) $y_n = -kx_n$ に相当します．

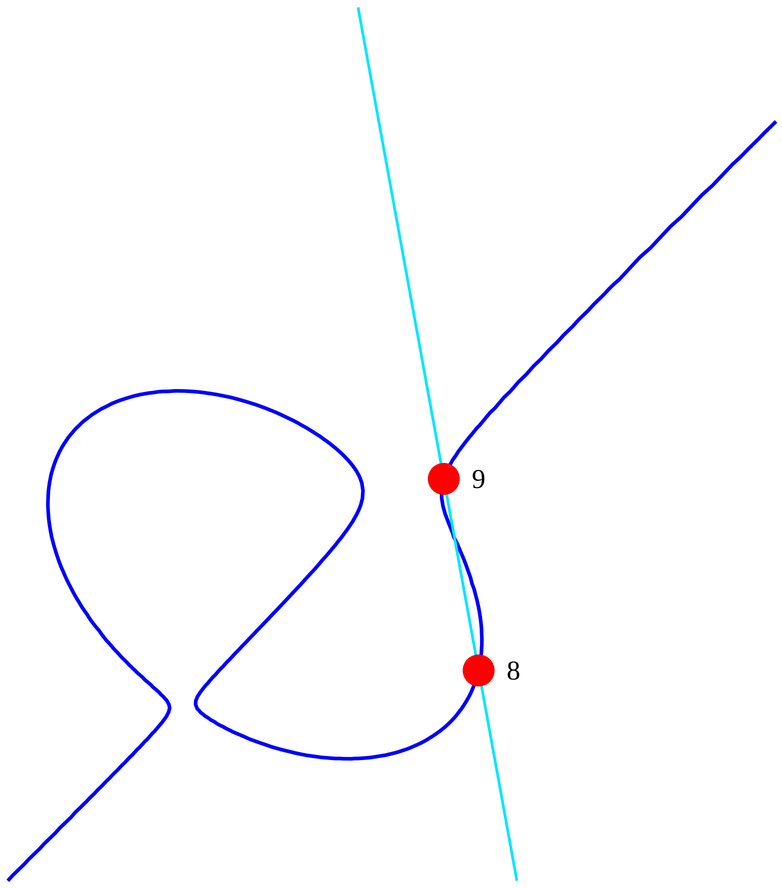
このような状況では，点の運動は次のようになります(規則は前と同じです)．

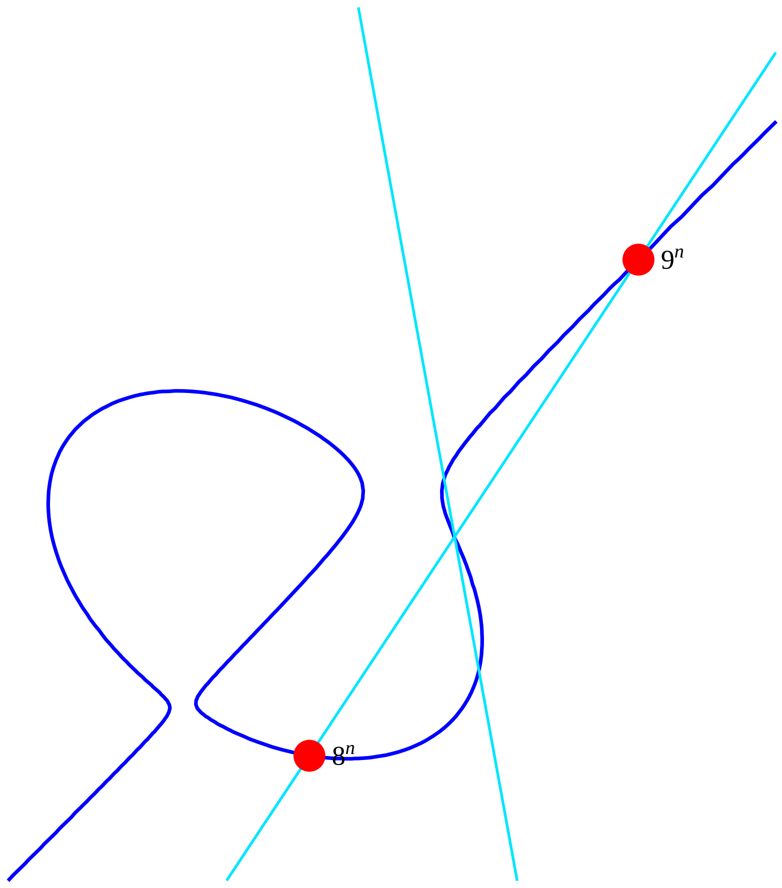
P_9^n: 「P_{10}を除く9点を通る3次曲線」と「P_9を除く9点を通る3次曲線」の交点



P_{10}が直線L上にあることから，P_{10}を通る緑曲線が(1次式)×(2次式)と因数分解されていることに注意して下さい．

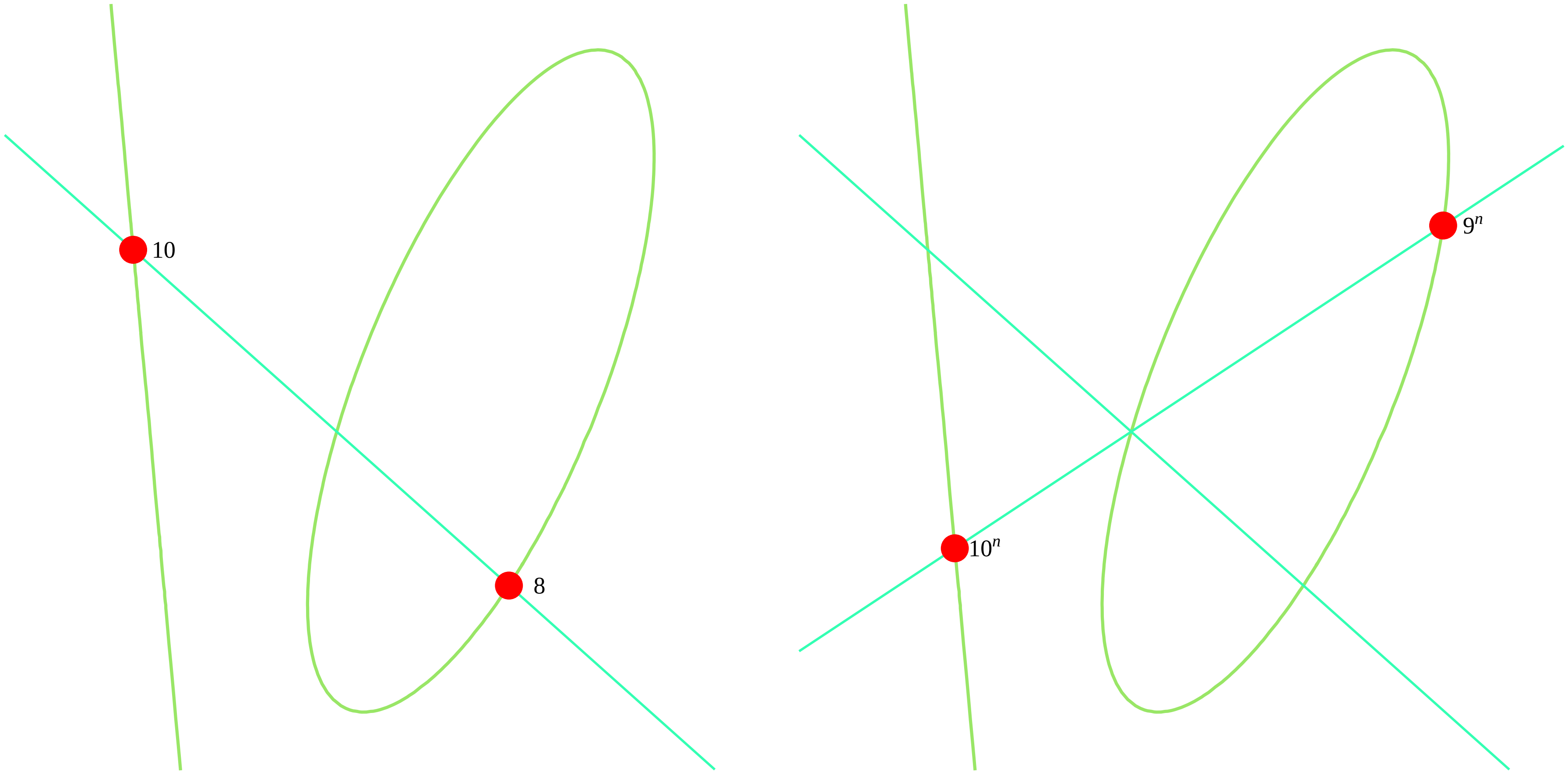
P_8^{n}: 青曲線, 直線 $\overline{P_8P_9}$, 直線 $\overline{P_8^{\mathsf{n}}P_9^{\mathsf{n}}}$ が 1 点で交わるような P_8^{n}





P_8, P_9 の変化は前と同様です.

P^{n}_{10}: 緑曲線，直線$\overline{P_8P_{10}}$，直線$\overline{P^{\mathrm{n}}_9P^{\mathrm{n}}_{10}}$ が１点で交わるようなP^{n}_{10}



緑曲線が直線Lと２次曲線に分解しているので，新しいP^{n}_{10}も直線L上に来ます．

こうして(i)(ii)の状況では直線Lが保存曲線のような役割を果たすことがわかります．しかも，P_{10}は，この直線上を１次分数変換

$$x_{n+1} = \frac{a_n x_n + b_n}{c_n x_n + d_n},$$

(ただし係数a_n, b_n, c_n, d_nはnと共に変化する)に従って運動します．これは離散リッカチ方程式とよばれ線形方程式に変換して解くことができます．

古典的な微分パンルヴェ方程式も，特別な状況でリッカチ方程式

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x),$$

に帰着させて解けることが，昔からよく知られていました．

こうした解の秘密は，３次曲線の性質，特に(３次式)=(１次式)×(２次式)という因数分解にあった，というわけです．

この節のまとめ

- 非線形・非保存系にもかかわらず性質の良い漸化式が知られていて，離散パンルヴェ方程式と呼ばれています．
- 離散パンルヴェ方程式は，パラメータが特別な値のとき厳密解をもつことがあります．
- そのような解は，幾何学的な方法で自然に導くことができます．
- 離散版を考えた結果，微分の場合を含めて単純で統一的な理解が得られました．

「解ける漸化式」のタネ明かし（その２）＝「３次曲線の分解」

むすび – 研究の意味 –

質問: 解ける方程式の研究にはどんな意味があるのか？
普段は「意味」を考えて研究しているわけではないのですが...

- かつて（５０年くらい前まで）は，解ける例は極めて稀な例外と思われていました．しかし，近年は豊富な例が見つかっていて，解けない場合にも，それに似た解ける場合から示唆を得ることがあります．

- 解くための様々な理論が開発され，それらは，数学に限らず他の分野にも影響を与えています．

「解ける数学」(業界用語では「可積分系」「可解系」) の面白さを感じてもらえたら幸いです．

ありがとうございました