オイラーの数学から —— 『無限解析序説』への招待

サイエンスセミナー 2007 年 7 月 29 日 (日)

野海 正俊 (神戸大学・大学院理学研究科)

[概要] レオンハルト・オイラー (1707-1783) は 18 世紀を代表する科学者の一人であり，数学・天文学・物理学の広範な領域にわたって，その後の自然科学の発展に計り知れない影響を与えた人物である．この講演では，オイラーが 1748 年に著した『無限解析序説』第 1 巻（邦訳「オイラーの無限解析」高瀬正仁訳，海鳴社）の内容を題材としてオイラーの数学の一端を紹介しながら，オイラーの数学のどういうところが，どういう風に面白いかをお話ししたい．『序説』は，無限級数，無限乗積，無限連分数といったさまざま無限を系統的に取り扱うためのアイディアを集約したもので，250 年を経た現代の読者にも新鮮な感動を与えてくれる書物である．

● はじめに

- 高校数学と大学数学の間のギャップが大きいのは何故か？
- 18 世紀の数学がすっぽり抜け落ちているのではないか？
- その 18 世紀の数学とはどんなものか？

● レオンハルト・オイラー (Leonhard Euler, 1707–1783) の著書から

• Introductio in analysin infinitorum (1748,「無限解析序説」全 2 巻, 392+403 頁)
高瀬正仁氏による日本語訳がある．第 I 巻は「オイラーの無限解析」(2001), 第 II 巻は「オイラーの解析幾何」(2006) という表題で，いずれも海鳴社から出版されている．

• Institutiones calculi differentialis (1755,「微分学教程」676 頁)

• Institutiones calculi integralis (1768–1770, 「積分学教程」全 3 巻, 462+542+508 頁)

• Vollständige Anleitung zur Algebra (1770, 「代数学詳説」全 2 巻, 651 頁)

• Lettres à une pricesse d'allemagne (1768–1772,「ドイツのある王女への手紙」全 3 巻)
オイラーがドイツのある王女の教育のために書いた「物理と哲学の様々な主題についての」手紙 234 通 (1760 年～1762 年) をまとめたもの．

● 「無限解析序説」第 I 巻

「無限解析序説」第 I 巻は，無限級数，無限乗積，無限連分数に固有の意義を認め，そのような無限を系統的 (代数的) に取扱うためのアイディアを集約した書物.

● 年表

16 世紀	Mersenne	1588 – 1648
	Descartes	1596 – 1650
17 世紀	Fermat	1601 – 1650
	関 孝和	1640?– 1708
	Newton	1642 – 1727
	Leibniz	1646 – 1716
	Bernoulli (Jakob)	1654 – 1705
	建部 賢弘	1664 – 1739
18 世紀	Euler	1707 – 1783
	d'Alembert	1717 – 1783
	Lagrange	1736 – 1813
	Laplace	1749 – 1827
	Legendre	1752 – 1833
	Fourier	1768 – 1830
	Gauss	1777 – 1855
	Cauchy	1789 – 1857
19 世紀	Abel	1802 – 1829
	Jacobi	1804 – 1851
	Dirichlet	1805 – 1859
	Galois	1811 – 1832
	Weierstrass	1815 – 1897
	Riemann	1826 – 1866
	Dedekind	1831 – 1916
	Lie	1842 – 1899
	Darboux	1842 – 1917
	Klein	1849 – 1925
	Poincaré	1854 – 1912
	Hilbert	1862 – 1943
	Painlevé	1863 – 1933
	Cartan	1869 – 1951
	Birkhoff	1884 – 1944
	Weyl	1885 – 1955

● 自然数の逆 2 乗和の公式についての「オイラー的」証明

自然数の逆 2 乗和についてのオイラーの等式とは,

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=1.6449340668\ldots=\frac{\pi^2}{6}.$$

$x=0$ で値 1 をとる x の多項式

$$f(x)=1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

の根を $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots$ とすれば $f(x)$ は

$$f(x)=\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha_3}\right)\cdots$$

と因数分解される. 従って根の逆数和について, 等式

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}+\cdots=-a_1$$

が成立する. この原理をもっと一般の函数に適用してみる. 今

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\cdots$$

に注意して

$$f(x)=\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1-\frac{1}{6}x+\frac{1}{120}x^2-\cdots$$

を考えると, $f(x)$ の零点は

$$x=1^2\pi^2,\ 2^2\pi^2,\ 3^2\pi^2,\ \ldots$$

である. 従って零点の逆数和について, 等式

$$\frac{1}{1^2\pi^2}+\frac{1}{2^2\pi^2}+\frac{1}{3^2\pi^2}+\cdots=\frac{1}{6}$$

即ち

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

を得る. 但し, この説明はオイラーの発見 (1935 頃) を聞いて, ヨハン・ベルヌイが再構成したものらしい.

このままでは証明としては不完全だが, 間違っている訳ではない.

$$\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{k^2\pi^2}\right)$$

或は同じことだが, $\sin x$ の無限乗積表示

$$\sin x = x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

が証明できればよい.

「無限解析序説」第 I 巻には三角函数の無限乗積表示を用いた証明が述べられている. またその副産物として, 様々な符号をもつ大量の逆冪和が求められている. この講演では, 「無限解析序説」第 I 巻の第 7 章から第 10 章の内容に沿って, オイラーが実際にどういう議論をしているのかを検討したい.

● 冪函数から指数函数・対数函数へ (第 7 章)

冪函数の冪が無限大 (または無限小) に近づくときに, 適当に変数のスケールを調整して極限をとると指数函数 (または対数函数) が得られる. このことを用いて指数函数や対数函数の無限級数表示を構成する.

● 三角函数とオイラーの公式 (第 8 章)

複素数の極形式を用いて三角函数の n 倍公式を導き, その極限として三角函数の無限級数表示を導くことができる. また, 極形式で書いた n 倍公式からの極限として, 指数函数と三角函数の間の関係式が導かれる.

● 多項式の因数分解から三角函数の無限乗積表示を導くこと (第 9 章)

x^n-1 の実係数の因子分解を基礎にして然るべき極限操作を行えば, $\sin x$ や $\sinh x$ の無限積表示を構成することができる.

● 自然数の逆 2 乗和とその仲間達 (第 10 章)

$\sin x$ の無限乗積表示から $\dfrac{1}{n^{2r}}$ $(n=1,2,\ldots)$ の対称式の値についての明示公式が得られる. また, $\sin x$ の無限乗積表示から $\cot x$ の部分分数展開を作っておけば, それを利用して, 様々な符号をもつ自然数の逆冪和が計算できる.

第 1 部　いろいろな函数を級数で表すこと

● 指数函数の級数表示 (オイラー風)

$a > 1$ とする．まず $a^0 = 1$ だが，冪 (べき) 指数が 0 から無限小の ε だけ増加すれば，冪 a^ε もまた 1 から無限小だけ増加する．そこで $a^\varepsilon = 1 + \delta$ と表そう．この δ も無限小である．今 δ と ε の比を b として $\delta = \varepsilon b$ と書くと，b は a に依存する量であって，

$$a^\varepsilon = 1 + \varepsilon\, b \tag{1}$$

が成立する．

(1) のもとでは $a = (1 + \varepsilon\, b)^{1/\varepsilon}$．従って a を底とする指数函数 a^x は

$$a^x = (1 + \varepsilon\, b)^{x/\varepsilon}$$

と表せる．そこで，右辺に二項展開を適用すると

$$(1 + \varepsilon\, b)^{x/\varepsilon} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{x/\varepsilon}{k} (\varepsilon\, b)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!}\, x(x - \varepsilon) \cdots (x - (k-1)\varepsilon).$$

ε は無限小だから 0 に置き換えて

$$a^x = (1 + \varepsilon\, b)^{x/\varepsilon} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!}\, x^k.$$

これで，指数函数 a^x の級数表示

$$a^x = 1 + \frac{b}{1!}x + \frac{b^2}{2!}x^2 + \cdots$$

が得られた．特に $x = 1$ とすれば，

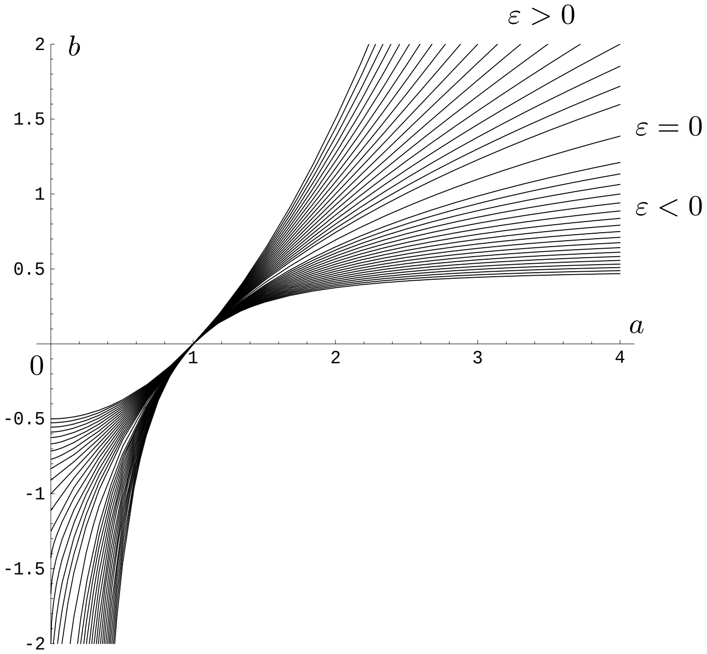
$$a = 1 + \frac{b}{1!} + \frac{b^2}{2!} + \cdots .$$

$b = 1$ に対応する a を特別に e と書くことにすれば，e を底とする指数函数の場合には，上の 2 つの式は

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots, \quad e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots$$

となる．

● **曲線族** $C_\varepsilon : a^\varepsilon = 1 + \varepsilon\, b$



曲線族

$$C_\varepsilon : \quad a^\varepsilon = 1 + \varepsilon\, b$$

を考えると, C_ε は $\varepsilon \to 0$ の極限で

$$C_0 : \quad a = e^b \quad \text{即ち} \quad b = \log a$$

に近づく.

変数を調整して極限をとれば, 冪関数 x^s は
$s \to \infty$ のとき指数函数 e^x に近づき,
$s \to 0$ のとき対数函数 $\log x$ に近づく.

$$y = \left(1 + \frac{x}{s}\right)^s \;\rightarrow\; y = e^x \qquad (s \to \infty)$$

$$y = \frac{1}{s}\left(x^s - 1\right) \;\rightarrow\; y = \log x \qquad (s \to 0)$$

$$y=\Bigl(1+\frac{x}{s}\Bigr)^s \quad\to\quad y=e^x \qquad (s\to\infty)$$

に注意して, 一般二項定理を用いると

$$\Bigl(1+\frac{x}{s}\Bigr)^s=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{s}{k}\frac{x^k}{s^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}1\Bigl(1-\frac{1}{s}\Bigr)\Bigl(1-\frac{2}{s}\Bigr)\cdots\Bigl(1-\frac{k-1}{s}\Bigr)x^k.$$

ここで, $s\to\infty$ とすると

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,x^k=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots$$

が得られる．また

$$y=\frac{1}{s}\bigl((1+x)^s-1\bigr) \ \to\ y=\log(1+x) \qquad (s\to 0)$$

に注意すると,

$$\frac{1}{s}\bigl((1+x)^s-1\bigr)=\sum_{k=1}^{\infty}\binom{s}{k}\frac{x^k}{s}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\,(s-1)(s-2)\cdots\bigl(s-(k-1)\bigr)\,x^k.$$

従って $s\to 0$ の極限で

$$\log(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\,x^k=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots \qquad (|x|<1)$$

を得る.

● 三角函数の n 倍角公式と級数表示

虚数単位 $i=\sqrt{-1}$ を用いると, 三角函数の加法定理

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\,\cos\beta-\sin\alpha\,\sin\beta\\ \sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\,\cos\beta+\cos\alpha\,\sin\beta\end{aligned}$$

は, 関係式

$$\begin{aligned}&\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)\\ &=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)\end{aligned}$$

と同等である．従って, 任意の自然数 n について n 倍角の公式は

$$\begin{aligned}\cos\,n\theta+i\sin\,n\theta&=(\cos\theta+i\sin\theta)^n\\ \cos\,n\theta-i\sin\,n\theta&=(\cos\theta-i\sin\theta)^n\end{aligned}$$

と書き表せる．辺々加えて

$$2\cos\, n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta - i\sin\theta)^n.$$

右辺の 2 つの項を二項展開すれば, i の奇数乗の項は相殺し, i の偶数乗の項だけを二重に加えることになるので

$$\begin{aligned}\cos\, n\theta &= \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{2k} (\cos\theta)^{n-2k} (\sin\theta)^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{2k} (\cos\theta)^{n} (\tan\theta)^{2k}\end{aligned}$$

を得る．これが $\cos\theta$ の n 倍角の公式の閉じた表示式である ($[s]$ は, s の整数部分を表す).

この式において $n\,\theta = x$ と置き換えると,

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{2k} \left(\cos\frac{x}{n}\right)^n \left(\tan\frac{x}{n}\right)^{2k}.$$

和の上端を ∞ に書き直したが, $n > 2k$ のとき二項係数の部分が 0 になるので, 内容としては $[n/2]$ までの和と同じことである．

$n \to \infty$ の極限においては

$$\cos\frac{x}{n} \sim 1, \qquad \sin\frac{x}{n} \sim \frac{x}{n}, \qquad \tan\frac{x}{n} \sim \frac{x}{n}$$

だから

$$\binom{n}{2k} \sim \frac{n^{2k}}{(2k)!}, \qquad \left(\cos\frac{x}{n}\right)^n \sim 1, \qquad \left(\tan\frac{x}{n}\right)^{2k} \sim \frac{x^{2k}}{n^{2k}}.$$

よって

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

が得られる．

同様に $\sin x$ でやれば,

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

となる．

今の議論で,

> **$n \to \infty$ のとき, $\cos\dfrac{x}{n} \sim 1$ だからといって,**
> **$\left(\cos\dfrac{x}{n}\right)^n \sim 1$ と結論づけてよいか？**

$$\cos\frac{x}{n} = 1 + a_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

と書くと

$$\left(\cos\frac{x}{n}\right)^n = (1 + a_n)^n = 1 + na_n + \binom{n}{2}a_n^2 + \cdots$$

> **a_n が小さいとき, n 乗すると誤差はおよそ n 倍されるが,**
> **a_n が $1/n$ よりも早く 0 に近づくときには，極限に影響しない.**

今の場合

$$a_n = \cos\frac{x}{n} - 1 = -2\sin^2\frac{x}{2n} \sim -\frac{x^2}{2n^2}.$$

だから

$$\cos\frac{x}{n} = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

従って

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{n}\right)^n = 1.$$

● オイラーの公式

n 倍角の公式は

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

ここで $n\theta = x$ とおくと

$$\cos x + i\sin x = \left(\cos\frac{x}{n} + i\sin\frac{x}{n}\right)^n$$

ここで $\cos\dfrac{x}{n} + i\sin\dfrac{x}{n} = 1 + \dfrac{ix}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ だから

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{n} + i\sin\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n = e^{ix}.$$

従って

$$\cos x + i\sin x = e^{ix}$$

を得る.

第 2 部　自然数の逆 2 乗和とその仲間達

● 多項式の因子分解から無限乗積へ

$n=2m+1$ を奇数の自然数として, x^n-1 を因子分解すると

$$x^n-1=(x-1)\prod_{k=1}^{m}(x-\alpha_k)(x-\overline{\alpha}_k),\qquad \alpha_k=e^{2\pi ik/n}$$

ここで,

$$(x-\alpha_k)(x-\overline{\alpha}_k)=x^2-2\,x\,\mathrm{Re}\,\alpha_k+|\alpha_k|^2=x^2-2x\cos\frac{2\pi k}{n}+1$$

だから

$$x^n-1=(x-1)\prod_{k=1}^{m}\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi k}{n}+1\right)$$

これを同次化すると

$$a^n-b^n=(a-b)\prod_{k=1}^{m}\left(a^2-2ab\cos\frac{2\pi k}{n}+b^2\right)$$

そこで, $a=1+x/n$, $b=1-x/n$ とおくと

$$a^n-b^n=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\quad\to\quad e^x-e^{-x}=2\sinh x\qquad(n\to\infty)$$

上の因子分解でこのような極限を考えれば, $\sinh x$ の因子分解 (無限乗積) が得られる筈である.

ひとまず $a=1+t$, $b=1-t$ とおいて整理すると (三角函数の半角の公式を用いて)

$$\begin{aligned}(1+t)^n-(1-t)^n&=2^n\,t\prod_{k=1}^{m}\left(\sin^2\frac{\pi k}{n}+t^2\cos^2\frac{\pi k}{n}\right)\\&=2^n\,t\prod_{k=1}^{m}\sin^2\frac{\pi k}{n}\prod_{k=1}^{m}\left(1+t^2\cot^2\frac{\pi k}{n}\right)\end{aligned}$$

t の係数を比較すると

$$2\,n=2^n\prod_{k=1}^{m}\sin^2\frac{\pi k}{n}$$

を得るので，これを知って上の式に戻すと

$$(1+t)^n-(1-t)^n=2\,n\,t\prod_{k=1}^{m}\left(1+t^2\cot^2\frac{\pi k}{n}\right)$$

なる公式を得る．そこで $t = x/n$ を代入すれば

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - \left(1-\frac{x}{n}\right)^n = 2\,x \prod_{k=1}^{m} \left(1+\frac{x^2}{n^2}\cot^2\frac{\pi k}{n}\right)$$

$m \to \infty$ での極限を考えると左辺の極限は $2\sinh x$ だから

$$\sinh x = x \lim_{m\to\infty} \prod_{k=1}^{m} \left(1+\frac{x^2}{n^2}\cot^2\frac{\pi k}{n}\right)$$

を得る．

各因子については, $m \to \infty$ (従って $n \to \infty$) のとき

$$\cot^2\frac{\pi k}{n} \sim \frac{n^2}{\pi^2 k^2}$$

なので,

$$\lim_{m\to\infty} \left(1+\frac{x^2}{n^2}\cot^2\frac{\pi k}{n}\right) = 1 + \frac{x^2}{\pi^2 k^2}.$$

従って, 極限の順序交換 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\prod_{k=1}^{m} = \prod_{k=1}^{\infty}\lim_{m\to\infty}$ が許されれば, $\sinh x$ の無限乗積

$$\sinh x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right)$$

が得られる．$\sinh ix = i\sin x$ を用いると $\sin x$ の無限乗積

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1-\frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right)$$

も導かれる．

[註釈] 上の $\sin x$ の無限乗積は

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)$$

と書いても良い．特に $x = 1/2$ とおくと

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{4k^2}\right) \quad \text{即ち} \quad \frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}.$$

これはウォリス (1616–1703) の公式.

● オイラーの議論

$\sinh x$, $\sin x$ の無限乗積表示の導出は, 「序説」の第 9 章, 第 156 節にある. 実は, その前段階として第 155 節で, オイラーは e^x-1 の因子分解も考察している. その辺りから眺めることにしよう.

もう一度 $n=2m+1$ の場合の x^n-1 の因子分解に戻ろう.

$$x^n-1=(x-1)\prod_{k=1}^{m}\left(x^2-2p_kx+1\right)$$

ここで $p_k=\cos(2\pi k/n)$ $(k=1,\ldots,m)$. 今 x を $1+x/n$ に書き換えて極限 $n\to\infty$ を考えれば, 左辺は e^x-1 に収束する. 前と同様に計算すると, この操作で

$$e^x-1=x\lim_{m\to\infty}\prod_{k=1}^{m}\left(1+\frac{x}{n}+\frac{x^2}{4n^2\sin^2(\pi k/n)}\right)$$

を得る. $n\to\infty$ の極限では $\sin\pi k/n\sim\pi k/n$ だから, 右辺は

$$x\prod_{k=1}^{m}\left(1+\frac{x}{n}+\frac{x^2}{4\pi^2k^2}\right)$$

に置き換えていいだろう. ここでオイラー曰く「これらの因子には無限に小さい x/n が入っているが, これを取りのけることは許されない. というのは, これは個々の因子の中に存在し, しかもそれらのすべての因子 — 総個数は $n/2$ — の和を作ると, 項 $x/2$ が生じるのであるから.」(ただし, 原文では, n ではなくて, 無限大を表す記号 i を使っている.) この不都合を回避するために

$$e^x-e^{-x}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right\}$$

を考察することにして, オイラーは $\sinh x$ の無限乗積表示の議論に移る.

a^n-b^n の因子分解の式に $a=1+x/n$, $b=1-x/n$ を代入すると, 右辺の因子は

$$a^2-2p_kab+b^2=2\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)-2\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\cos\frac{2\pi k}{n}$$

となる. $n\to\infty$ の極限を考えるので

$$\cos\frac{2\pi k}{n}=1-2\sin^2\frac{\pi k}{n}\quad を\quad 1-\frac{2\pi^2k^2}{n^2}\quad に$$

置き換えて計算すると, 右辺は

$$\frac{4\pi^2k^2}{n^2}\left(1+\frac{x^2}{\pi^2k^2}-\frac{x^2}{n^2}\right)$$

となる．従って

$$e^x - e^{-x} = 2\,x \lim_{m\to\infty} \prod_{k=1}^{m} \left(1 + \frac{x^2}{\pi^2 k^2} - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

となるだろう．今度は x/n の項はないが, 代わりに x^2/n^2 の項が現れた．しかし $n \to \infty$ の極限では, 「項 x^2/n^2 は除去してもかまわない．というのは, この項は n を乗じてもなお無限に小さい状態に留まるからである.」x^2/n^2 を取り除けば $1 + x^2/\pi^2 k^2$ という 2 次因子が定まり, $\sinh x$ の因子分解

$$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right)$$

が得られるという主張である．

● 基本対称式と冪和対称式の関係 – ニュートンの公式

$$f(x) = (1 - \alpha_1 x)(1 - \alpha_2 x)(1 - \alpha_3 x) \cdots$$

を展開して

$$f(x) = 1 - e_1 x + e_2 x^2 - e_3 x^3 + \cdots$$

と書くと x^r の係数

$$e_r = \sum_{k_1 > k_2 > \cdots > k_r} \alpha_{k_1} \alpha_{k_2} \cdots \alpha_{k_r}$$

は $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ の r 次の**基本対称式**である．

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ の**冪和対称式**

$$p_r = \alpha_1^r + \alpha_2^r + \cdots \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

を考えると, これらは基本対称式を用いて表される．

$$\begin{aligned}
p_1 &= e_1 \\
p_2 &= e_1 p_1 - 2e_2 = e_1^2 - 2e_2 \\
p_3 &= e_1 p_2 - e_2 p_1 + 3e_2 = e_1^3 - 3e_1 e_2 + 3e_3 \\
p_4 &= e_1 p_3 - e_2 p_2 + e_3 p_1 - 4e_4 = e_1^4 - 4e_1^2 e_2 + 4e_1 e_3 + 2e_2^2 - 4e_4 \\
&\cdots
\end{aligned}$$

この漸化式

$$p_r - e_1 p_{r-1} + e_2 p_{r-2} - \cdots + (-1)^{r-1} e_{r-1} p_1 + (-1)^r r e_r = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

を**ニュートンの公式**という.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ が無限個であっても, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_n| < +\infty$ ならばこの関係式は正しい.

● 対数微分と冪和対称式

「序説」では微分も積分も用いていないので, 対数微分も出て来ないが, ここでは話を見通しよくするために, 微分を使った説明を採用する.

無限乗積

$$f(x) = (1 - \alpha_1 x)(1 - \alpha_2 x)(1 - \alpha_3 x) \cdots$$

の対数微分が許されるなら

$$-\frac{x f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha_1 x}{1 - \alpha_1 x} + \frac{\alpha_2 x}{1 - \alpha_2 x} + \frac{\alpha_3 x}{1 - \alpha_3 x} + \cdots$$

ここで

$$\frac{\alpha_k x}{1 - \alpha_k x} = \alpha_k x + \alpha_k^2 x^2 + \alpha_k^3 x^3 + \cdots$$

なので

$$-\frac{x f'(x)}{f(x)} = p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + \cdots = g(x).$$

$f(x)$ と $g(x)$ の関係を $f(x) g(x) + x f'(x) = 0$ 即ち

$$(1 - e_1 x + e_2 x^2 - e_3 x^3 + \cdots)(p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + \cdots) + (-e_1 x + 2 e_2 x^2 - 3 e_3 x^3 + \cdots) = 0$$

と書いて, x^r の係数を取り出せば,

$$p_r - e_1 p_{r-1} + e_2 p_{r-2} - \cdots + (-1)^{r-1} e_{r-1} p_1 + (-1)^r r e_r = 0$$

を得る. これがニュートンの公式である.

● **自然数の逆 2 乗の対称式**

$\sin x$ の無限乗積

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$$

を考えると

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r \pi^{2r}}{(2r+1)!}x^{2r}$$

だから $\alpha_k = 1/k^2$ $(k = 1, 2, \ldots)$ の r 次の基本対称式については

$$e_r = \sum_{k_1 > \cdots > k_r} \frac{1}{k_1^2 \cdots k_r^2} = \frac{\pi^{2r}}{(2r+1)!}$$

が成立する. (多重ゼータ値の一種.)
これは, 次の等式を意味する.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots &&= \frac{\pi^2}{6},\\
&\frac{1}{2^2 1^2}+\frac{1}{3^2 1^2}+\frac{1}{3^2 2^2}+\frac{1}{4^2 1^2}+\frac{1}{4^2 2^2}+\cdots &&= \frac{\pi^4}{120}\\
&\frac{1}{3^2 2^2 1^2}+\frac{1}{4^2 2^2 1^2}+\frac{1}{4^2 3^2 1^2}+\cdots &&= \frac{\pi^6}{5040}\\
&\frac{1}{4^2 3^2 2^2 1^2}+\frac{1}{5^2 3^2 2^2 1^2}+\frac{1}{5^2 4^2 2^2 1^2}+\cdots &&= \frac{\pi^8}{362880}\\
&\qquad\cdots
\end{aligned}$$

そこで, ニュートンの公式

$$p_r - e_1 p_{r-1} + e_2 p_{r-2} - \cdots + (-1)^{r-1} e_{r-1} p_1 + (-1)^r r e_r = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

または冪和対称式を基本対称式で表す式

$$\begin{aligned}
&p_1 = e_1, \qquad p_2 = e_1^2 - 2e_2,\\
&p_3 = e_1^3 - 3e_1 e_2 + 3e_3,\\
&p_4 = e_1^4 - 4e_1^2 e_2 + 4e_1 e_3 + 2e_2^2 - 4e_4\\
&\qquad\cdots
\end{aligned}$$

を用いて計算すると, この場合の冪和対称式は次のように決まる.

$$
\begin{aligned}
p_1 &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}, \\
p_2 &= 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}, \\
p_3 &= 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{945}, \\
p_4 &= 1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \cdots = \frac{\pi^8}{9450}, \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

[註釈] ゼータ函数の特殊値を表すオイラーの公式

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \qquad (s > 1)$$

で定義される s の函数 (を複素関数として拡張したもの) を**リーマンのゼータ函数**という. $s = 2r$ $(r = 1, 2, \ldots)$ の場合には, 特殊値 $\zeta(2r)$ が次のように表される.

$$\zeta(2r) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2r}} = \frac{2^{2r-1}|B_{2r}|}{(2r)!}\pi^{2r} \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

ここで B_{2r} は**ベルヌイ数**で, 次の展開係数で定義されるもの.

$$\frac{x}{2} \cot \frac{x}{2} = 1 - \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{B_{2r}}{(2r)!} x^{2r}$$

$\sin \pi x$ の無限乗積の式

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$$

に対数微分を施し x を乗じると

$$\pi x \cot \pi x = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2/k^2}{1 - x^2/k^2} = 1 - 2\sum_{r=1}^{\infty} p_r\, x^{2r}$$

となる. これとベルヌイ数の定義式を見比べれば $\zeta(2r)$ に対するオイラーの公式を得る.

● 様々な符号を持つ冪和

$\sin \pi x$ の無限乗積

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) = \pi x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{k}\right) \left(1 + \frac{x}{k}\right)$$

の対数微分をとると

$$\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x-k} + \frac{1}{x+k} \right) = \pi \cot \pi x$$

さらにこの式を更に微分して行くと

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(x-k)^2} + \frac{1}{(x+k)^2} \right) &= \pi^2 (1 + \cot^2 \pi x) \\
\frac{1}{x^3} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(x-k)^3} + \frac{1}{(x+k)^3} \right) &= \pi^3 (\cot \pi x + \cot^3 \pi x) \\
\frac{1}{x^4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(x-k)^4} + \frac{1}{(x+k)^4} \right) &= \frac{\pi^4}{3} (1 + 4 \cot^2 \pi x + 3 \cot^4 \pi x) \\
&\cdots
\end{aligned}$$

のような等式の系列が得られる.

$$(\cot \pi x)' = -\frac{\pi}{\sin^2 \pi x} = -\pi(1 + \cot^2 \pi x)$$

に注意すると, t の多項式

$$\begin{aligned}
&P_1(t) = t, \quad P_2(t) = t^2 + 1, \quad P_3(t) = t^3 + t \\
&P_4(t) = t^4 + \frac{4}{3} t^2 + \frac{1}{3}, \ P_5(t) = t^5 + \frac{5}{3} t^3 + \frac{2}{3} t \\
&\cdots
\end{aligned}$$

が定義出来て

$$\frac{1}{x^s} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(x-k)^s} + \frac{1}{(x+k)^s} \right) = \pi^s P_s(\cot \pi x)$$

と表されることが分かる $(s = 1, 2, \ldots)$.

オイラーは, この等式の系列を用いて, 様々な符号を持つ冪和の値を決定している. まず,

$$\begin{aligned}\pi^s P_s(\cot \pi x) &= \frac{1}{x^s} + \frac{1}{(x-1)^s} + \frac{1}{(x+1)^s} + \frac{1}{(x-2)^s} + \frac{1}{(x+2)^s} + \cdots \\ &= \frac{1}{x^s} \pm \frac{1}{(1-x)^s} + \frac{1}{(1+x)^s} \pm \frac{1}{(2-x)^s} + \frac{1}{(2+x)^s} \pm \cdots\end{aligned}$$

と書いておく. 但し, 複号は s の偶奇に応じて $\pm$ の符号をとるものとする. 今, 自然数 n と $a = 1, 2, \ldots, n-1$ を固定する (簡単のため $a < n/2$ とする). $x = a/n$ を代入して $1/n^s$ を乗ずると

$$\frac{\pi^s}{n^s} P_s(\cot \frac{\pi a}{n}) = \frac{1}{a^s} \pm \frac{1}{(n-a)^s} + \frac{1}{(n+a)^s} \pm \frac{1}{(2n-a)^s} + \frac{1}{(2n+a)^s} \pm \cdots$$

従って, 次のような等式が得られる. $s = 2r-1$ が奇数のときには

$$\sum_{k \equiv \pm a \pmod{n}} \frac{\pm 1}{k^{2r-1}} = \frac{\pi^{2r-1}}{n^{2r-1}} P_{2r-1}(\cot \frac{\pi a}{n})$$

$s = 2r$ が偶数のときには

$$\sum_{k \equiv \pm a \pmod{n}} \frac{1}{k^{2r}} = \frac{\pi^{2r}}{n^{2r}} P_{2r}(\cot \frac{\pi a}{n})$$

$n = 3,\ a = 1$ $(\cot \pi/3 = \sqrt{3})$ の場合は

$$\begin{aligned}\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \cdots &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \\ \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots &= \frac{4\pi^2}{27} \\ \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} - \cdots &= \frac{4\pi^3}{81\sqrt{3}} \\ \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \cdots &= \frac{8\pi^4}{729} \\ \cdots\end{aligned}$$

$n=4$, $a=1$ $(\cot\pi/4=1)$ の場合は,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots &= \frac{\pi}{4}\\
\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\cdots &= \frac{\pi^2}{8}\\
\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\cdots &= \frac{\pi^3}{32}\\
\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\cdots &= \frac{\pi^4}{96}\\
\cdots
\end{aligned}
$$

$n=8$, $a=1$ $(\cot\pi/8=1+\sqrt{2})$ の場合から

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\cdots &= \frac{(1+\sqrt{2})\pi}{8}\\
\frac{1}{1^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{15^2}+\frac{1}{17^2}+\cdots &= \frac{(2+\sqrt{2})\pi^2}{32}
\end{aligned}
$$

同じく $n=8$ で $a=3$ $(\cot 3\pi/8=\sqrt{2}-1)$ の場合からは

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{19}-\cdots &= \frac{(\sqrt{2}-1)\pi}{8}\\
\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{13^2}+\frac{1}{19^2}+\cdots &= \frac{(2-\sqrt{2})\pi^2}{32}
\end{aligned}
$$

といった等式が得られる. $n=8$ の場合の 2 種類の等式を組合わせると,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots &= \frac{\sqrt{2}\pi}{4}\\
\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}-\cdots &= \frac{\sqrt{2}\pi^2}{16}
\end{aligned}
$$

という具合に, 奇数の冪からなる新しい符号パターンの等式が得られる.「序説」の第 10 章の後半には, $n=16$ の場合まで, 様々な符号パターンを持つ等式が記載されている.